Direction régionale de l'éducation Tunis 1	Devoir de Contrôle n° : 1 Mathématiques	Année scolaire 2017/2018
Lycée : El Montazeh El Mourouj 2	Durée : 2H	Classe : 4 ème Sc-Exp
Mr : Gary Badreddine	Date : 06/11/2017	Coefficient :3

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3, L'annexe est à rendre avec la copie.

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°: 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique 2 cm).

I. 1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E) : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

a. Vérifier que (E) admet deux racines complexes conjuguées .

b. Vérifier que $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$ est une racine de (E) .

c . En déduire l'autre racine z_1 de (E) .

2. Soit $f(z) = z^3 - (2\sqrt{2}+2i)z^2 + 4(\sqrt{2}i+1)z - 8i$.

a. Vérifier que $f(2i) = 0$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $f(z) = 0$.

II. 1. Placer dans le plan , les points **A**$(\sqrt{2}(1+i))$, **B**$(\sqrt{2}(1-i))$ **et C**$(2i)$.

2. Montrer que **A** , **B** et **C** appartiennent à un cercle $(\mathcal{C})$ dont on déterminera le centre et le rayon.

3. a. Déterminer l'affixe du point **D** tel que : $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$.

b. En déduire la nature de quadrilatère **ABDC** .

c. Déterminer l'affixe du point **I** milieu de **[AB].**

Exercice n°: 2

On donne $\boldsymbol{a}=\mathbf{1}+\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}$ et $\boldsymbol{b}=-\mathbf{1}+\boldsymbol{i}$.

1. **a.** Ecrire $\boldsymbol{d}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ sous forme algébrique.

   b. Donner la forme exponentielle de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

   c. En déduire la forme exponentielle de $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{d}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

   d. En déduire $\mathbf{cos}(\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}})$ et $\mathbf{sin}(\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}})$.

2. Soit $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{r}e^{\boldsymbol{i}\boldsymbol{\alpha}}$ avec $\boldsymbol{r}>0$ et $\boldsymbol{\alpha}\in\left[\mathbf{0},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$.

   a. Ecrire $\boldsymbol{z}=\frac{(-\mathbf{1}+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}^2}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}})\bar{\boldsymbol{z}}}$ à l'aide de $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{\alpha}$.

   b. Déterminer les réels $\boldsymbol{\alpha}$ pour que $\boldsymbol{z}$ soit un imaginaire pur .

Exercice n°: 3

Soit $(\boldsymbol{u_n})$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} \boldsymbol{u_0}=\mathbf{0} \\ \forall\,\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}\ ,\ \boldsymbol{u_{n+1}}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{u_n^2}}} \end{cases}$.

1. **a.** Montrer que $\forall\,\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$, on a : $\mathbf{0}\le\boldsymbol{u_n}<\sqrt{\mathbf{2}}$.

   b. Etudier la monotonie de la suite $(\boldsymbol{u_n})$. En déduire qu'elle est convergence et donner sa limite.

2. Soit $(\boldsymbol{v_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ la suite définie $\boldsymbol{v_n}=\frac{\mathbf{2}+\boldsymbol{u_n^2}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{u_n^2}}$.

   a. Montrer que $(\boldsymbol{v_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2.

   b. Exprimer $(\boldsymbol{v_n})$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ puis montrer que , pour tout $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n}=\sqrt{\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{n}}}$.

   c. Retrouver alors la limite de $\boldsymbol{u_n}$ quand $\boldsymbol{n}$ tend vers $+\infty$.

 à rendre avec les copies.

Nom :	***Prénom :***

L'annexe